العنوان:	تحليل متعدد المتغيرات واستخدامه في السيطرة على نوعية الانتاج
المصدر:	المجلة العراقية للعلوم الإحصائية
الناشر:	جامعة الموصل - كلية علوم الحاسوب والرياضيات
المؤلف الرئيسي:	عبدالأحد، باسم منصور
المجلد/العدد:	ع7
محكمة:	نعم
التاريخ الميلادي:	2005
الصفحات:	83 - 96
رقم MD:	866562
نوع المحتوى:	بحوث ومقالات
قواعد المعلومات:	EcoLink
مواضيع:	الدوال (رياضيات)
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/866562

المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (7) 2005
ص ص [83 – 96]

تحليل متعدد المتغيرات واستخدامه في السيطرة على نوعية الانتاج

باسم منصور عبدالاحد*

المستخلص

يتناول علم الاحصاء اساليب وطرائق تستخدم في مجال السيطرة على النوعية من قبل المختصين في هذا المجال والتي تؤدي الى الحصول على منتجات ذات نوعية افضل وفقا للمواصفات الصناعية المطلوبة مع صفات حماية كل من المنتج والمستهلك على حد سواء وهنا يبرز دور الاحصاء في تقديم افضل الاساليب والطرائق المتطورة في السيطرة على النوعية، وأحد هذه الاساليب هو تحليل متعدد المتغيرات واستخدامه في السيطرة على نوعية المنتوج والتي عرضها هذا البحث من خلال اهم انواع لوحات السيطرة الشائعة الاستخدام في هذا المجال وهي لوحة T^2 بانواعها الثلاث:

1- لوحة T^2 للكمية $X'S^{-1}X$
2- لوحة T^2 للكمية $X'R^{-1}X$
3- لوحة T^2 للكمية $Y'Y$

Multivariate Analysis and it's Use in Quality Control

ABSTRACT

Statistic Since contain several techniques and ways used in Quality Control by Specialist which lead toget for the best type of products according to industrial specification order with safe security either for the producer and customer, so here statistics will produce the best techniques and improved ways in quality control and one of these techniques is Multivariate analysis and it's use in quality control that has mentioned in this search through the most important types of control charts which are

---

* مدرس/ قسم الاحصاء/ الجامعة المستنصرية

تاريخ الاستلام: 2003/11/29 ـــــــــــــــــــــــ تاريخ القبول: 2004/1/20

widespread used in this side, it's T^2 chart with three types, they are:

1- T^2 chart for $X'S^{-1}X$
2- T^2 chart for $X'R^{-1}X$
3- T^2 chart for $Y'Y$

المقدمة:

بالرغم من اهمية دور الاحصاء في التخطيط والتنظيم والتنبوء والمساهمة في الوصول الى القرار الصحيح بأقل كلفة واقل جهد فقد اصبح علم الاحصاء يستخدم في المجالات الحياتية كافة ولاسيما المجال الصناعي.ويتناول علم الاحصاء اساليب وطرائق تستخدم في مجال السيطرة على النوعية من قبل المهندسين والمختصين في مجال السيطرة وتطور هذا المجال بشكل واسع بعد الحرب العالمية الثانية نتيجة لتطور النظرية الاحصائية من جهة وانفجار الثورة الصناعية في البلدان الاوربية من جهة اخرى لذلك فان استخدام هذه الاساليب والطرائق الاحصائية للسيطرة على النوعية يودي بنا للحصول على منتجات ذات نوعية افضل وفقا للمواصفات الصناعية المطلوبة مع ضمان حماية كل من المنتج والمستهلك على حد سواء ومن هنا يبرز دور الاحصاء في تقديم افضل الاساليب والطرائق المتطورة في السيطرة على النوعية والتي تؤدي الى تقليل التكاليف وبأقصى فترة زمنية ممكنة وبأقل عدد من العاملين.لان السيطرة النوعية تعني عملية فحص واختبار ومطابقة المواد الاولية الداخلة في الانتاج والمنتجات النهائية او المنتجات النصف مصنعة او الاجزاء المصنعة للمواصفات مسبقا بهدف الحصول على المنتوج ذي النوعية المرغوب فيها ورفض المنتجات غير المطابقة للمواصفات والعمل على تصحيح الاخطاء التي تكشفها الطرائق الاحصائية ومعرفة اسبابها واتخاذ الاجراءات المناسبة لمعالجتها ومنع تكرار حدوثها.

الهدف من البحث:

يهدف هذا البحث الى عرض اهم انواع لوحات السيطرة الشائعة الاستخدام في مجال تحليل متعدد المتغيرات واستخدامه في السيطرة على نوعية الانتاج وهي لوحة T^2 بانواعها الثلاثة وهي:

1- لوحة T^2 للكمية $X'S^{-1}X$

2- لوحة T^2 للكمية $X'R^{-1}X$

3- لوحة T^2 للكمية $Y'Y$

استعراض البحث:

لقد كانت بداية استخدام فكرة السيطرة على نوعية الانتاج من خلال عدة متغيرات في عام 1947 من خلال كتاب نشرته مجموعة من الباحثين الاحصائيين بعنوان " Multivariate Quality control " وبعدها نشر عام 1956 بحث بعنوان " Quality control Methods for several related variables " للباحث Maksen ثم توالت الدراسات والابحاث العديدة في هذا المجال والتي كانت تركز على ان البيانات تتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات أي انه يوجد متجه " Vector " للمتغيرات الداخلة في الدراسة يتبع توزيع متعدد المتغيرات الطبيعي. ثم اختص بهذا المجال الباحث Hotelling الذي يعتبر من اهم المهتمين في مجال التحليل الاحصائي المتعدد المتغيرات واقترح اسلوب السيطرة على نوعية الانتاج من خلال استخدام لوحة T^2 التي تمتاز بأحتوائها على حد اعلى فقط وهذا الحد يمثل قيمة T^2 فاذا تجاوزت احدى المشاهدات او اكثر الحد الاعلى فان العملية الانتاجية تكون خارج السيطرة ولهذه اللوحة ثلاث طرائق او يمكن اعتبارها من انواع لوحة T^2 يمكن من خلالها اجراء العمليات الاحصائية وتحديد القيم المطلوبة لغرض رسم لوحة السيطرة وهذه الطرائق هي:

(1-2) لوحة T^2 للكمية $T^2 = X'S^{-1}X$ *

تعتمد هذه الطريقة على ايجاد قيمة T^2 ومقارنتها مع قيمة T^2 الجدولية تحت مستوى معنوية (α) .

ليكن X يمثل متجها يضم n من المتغيرات اذ يتم عن طريق هذه المتغيرات السيطرة على نوعية الانتاج.

---

* المصدر رقم 1.

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}$$

ان المتجه X يتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات أي ان $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$

حيث ان :

$\underline{\mu}$ تمثل متجه المتوسطات

Σ تمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك.

وان المصفوفة S معرفة كما يأتي:

$$S = \begin{bmatrix} S_{X1}^2 & S_{X1X2} & \cdot & \cdot & S_{X1Xn} \\ S_{X1X2} & S_{X2}^2 & \cdot & \cdot & S_{X2Xn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{X1Xn} & S_{X2Xn} & \cdot & \cdot & S_{Xn}^2 \end{bmatrix}$$

اذ ان المصفوفة S أكيدة الايجابية أي ان محددها لايساوي الصفر ولهـا معكـوس وهي تمثل تقديرا غير متحيز الى مصفوفة التباين والتباين المشترك Σ .

وبافتراض ان

$$x_1 = (X_1 - \overline{X})$$
$$x_2 = (X_2 - \overline{X})$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$x_n = (X_n - \overline{X})$$

فان متجه الانحرافات $\underline{x}$ يصبح كما يأتي:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

عندئذ فان $x's^{-1}x$ ستتوزع توزيع T^2 بدرجات حرية (n-1) عندئذ فان مصفوفة الانحرافات الخاصة بالعينة المسحوبة ستصبح كما ياتي:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2k} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$X = \left[\underline{x_1} \quad \underline{x_2} \quad \underline{x_3} \quad \ldots\ldots \quad \underline{x_k}\right]$$

فمثلاً متجه T^2 عند القياسات 3 سيكون كما ياتي:

$$T_3^2 = \underline{X'_3} S^{-1} \underline{X_3}$$

ولاتخاذ القرار بشأن الجودة او النوعية فانه تتم مقارنة T^2 المحسوبة الخاصة بكل قياس من القياسات مع قيمة T^{2*}

حيث ان :

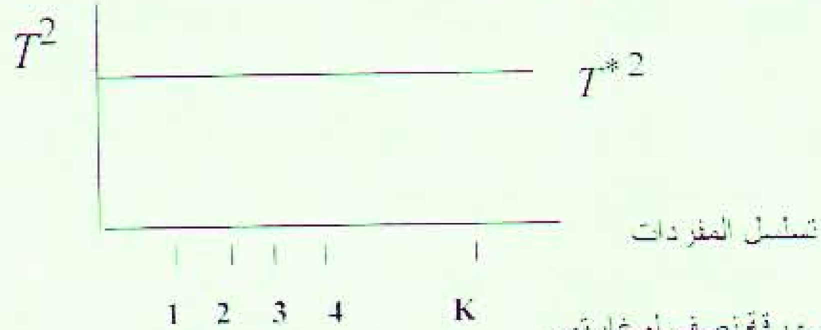
$$^{*}T^{2*} = \frac{(K-1)n}{(K-n)} \cdot F((n,k-n),\alpha)$$

وان $F(n,k-n)$ تمثل قيمة F الجدولية بدرجة حرية n,k-n وتحت مستوى معنوية α

---

* المصدر رقم 1 .

فاذا كانت قيمة $T^2 < T^{*2}$ المحسوبة لاي قياس من القياسات عندئذ فانه تقبـل الفرضية القائلة ان العملية الانتاجية هي تحت السيطرة الاحصائية اما اذا كانت قيمة $T^2 > T^{*2}$ عندئذ فانه سوف ترفض الفرضية القائلة ان العملية الانتاجية هـي تحت السطرة الاحصائية أي ان العملية ستكون خارج السيطرة الاحصائية وبذلـك تكون لوحة الرقابة كما في الرسم



على ورقة نصف لوغارتمي

(2-2) لوحة T^2 للكمية $X'R^{-1}X$ *

وتستخدم هذه الطريقة في حالة كون المتغيرات مقاسة بوحدات مختلفة غير متشابهة اذ يتم استخدام المصفوفة R (مصفوفة الارتباط) محل المصفوفة S الا انه في هـذه الحالة يلزم تغيير قيم X_{ij} وذلك للتخلص من اختلافات وحدات القياس وكما ياتي:

حيث

$$X_{ij}^{*} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_i}{S_i} \qquad i = 1,2,\ldots\ldots n$$

$$j = 1,2,\ldots\ldots k$$

لذلك فان قيمة

$$T_j^2 = X_j^{*'} R^{-1} X_j^{*}$$

وتتم مقارنة قيمة T_j^2 مع قيمة T^{*2} وكما مر سابقا.

---

* المصدر رقم 2.

نلاحظ من خلال الطريقتين السابقتين انه لايمكن معرفة سبب خروج الانتاج عن السيطرة في حالة قبول الفرضية القائلة بأن العملية الانتاجية هي خارج السيطرة وذلك بسبب كون المتغيرات مرتبطة فيما بينها لذلك تم اقتراح الطريقة الثالثة للتخلص من هذه الظاهرة.

(2-3) لوحة T^2 للكمية $Y'Y$

تختلف هذه الطريقة عن الطريقتين السابقتين

$$T^2 = X'S^{-1}X$$

$$T^2 = X^{*'}R^{-1}X^*$$

وذلك باجراء عملية تحويل المتغيرات $X_1, \ldots\ldots, X_n$ المرتبطة فيما بينها الى متغيرات ولتكن $(Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n)$ عن طريق استخدام طريقة (تغير المركبات الرئيسية).

الاشتقاق لهذه الطريقة:

نعلم ان المتجه

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

يمثل متجه لـ n من المتغيرات التي تعكس نوعية الانتاج ونعلم كذلك ان المتجه $\underline{X}$ يتوزع توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات بوسط $\underline{\mu}$ وتباين وتباين مشترك $\sum$.

أي ان $X \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$ وان مصفوفة S هي كما ياتي:

هذه المصفوفة تمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك على اساس عينة حجمها K

$$S = \begin{bmatrix} S_1^2 & S_{12} & . & . & S_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ S_{n1} & S_{n2} & . & . & S_n^2 \end{bmatrix}$$

وعلى هذا تكون مصفوفة الارتباط كما يأتي:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots\cdots & r_{1j} & \cdots\cdots & r_{1n} \\ . & 1 & . & . & . & r_{2n} \\ r_{1j} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ r_{1n} & r_{2n} & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

حيث ان :

$$r_{ij} = \begin{cases} \dfrac{S_{ij}}{S_i S_j} & for \quad i \neq j \\ 1 & for \quad i = j \end{cases}$$

فاذا كانت كل من $\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_n$ تمثل الجذور المميزة للمعادلة

$$|R - \lambda I| = 0$$

ولتكن المصفوفة Λ تمثل مصفوفة قطرية تمثل قيم λ عناصر القطر الرئيسي أي ان :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ولتكن كل من ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \ldots\ldots, \underline{V}_n$) تمثل المتجهات المميزة المقابلـــة للجـــذور المميزة والتي يتم الحصول عليها من حل المعادلة

$$[R - \lambda_i I]\underline{V}_i = 0 \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

حيث ان

$$\underline{V}_i = (V_i X_1 \quad V_i X_2 \ldots\ldots\ldots V_i X_n) \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, n$$

عندئذ تكون المصفوفة V الخاصة بالمتجهات المميزة كما يأتي:

$$V = \begin{bmatrix} V_1X_1 & V_1X_2 & . & . & V_1X_n \\ V_2X_1 & V_2X_2 & . & . & V_2X_n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ V_nX_1 & V_nX_2 & . & . & V_nX_n \end{bmatrix}$$

ويلاحظ ما يأتي

1. $tr\ \Lambda = tr\ R = n$

أي ان

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n = 1 + 1 + \ldots.. + 1 = n$$

2. $|\Lambda| = |R|$
3. $VV' = \Lambda$

$V_i'V_j = 0 \qquad for\ all \quad i \neq j$

$V_i'V_i = \lambda_i$

4. $V'V = R$

ولذلك فان مصفوفة المركبات الرئيسية Z يمكن حسابها كما يأتي:

$$Z = VX$$

اذ ان المصفوفة Z تمثل مصفوفة القيم المميزة للمتجه $\underline{X}$ علـــى اســـاس العينـــة المسحوبة ويتم الحصول على مصفوفة التباين الخاصة بـــــ Z وذلـــك بضـــرب مصفوفة الارتباط الخاصة بـــ X اماميا وخلفيا بمصفوفة التحويل V (مصفوفـــة المتجهات المميزة) .

أي ان

$$V.C = VRV'$$

وحيث ان مصفوفة $V'V = R$

لذلك فان

$$V - Cov(Z) = VV'VV'$$

وحيث انه $\Lambda = VV'$

لذلك فان

$$\Lambda\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & .... & 0 \\ . & . & . \\ 0 & ..... & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & ...... & 0 \\ . & . & . \\ 0 & ...... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$V - Cov(Z) = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & .... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ...... & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = \Lambda^2$$

وان :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & .... & Z_{1j} & .... & Z_{1k} \\ Z_{21} & Z_{22} & .... & Z_{2j} & .... & Z_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ Z_{i1} & Z_{i2} & .... & Z_{ij} & .... & Z_{ik} \\ . & . & . & . & . & . \\ Z_{n1} & Z_{n2} & .... & Z_{nj} & .... & Z_{nk} \end{bmatrix}$$

$$Var.(Z_i) = \lambda_i^2 \qquad \forall i$$
$$Cov(Z_i, Z_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$$

وحيث ان $\overline{Z}_i = 0$

وان $Z = VX$ وهي تمثل تحويلا خطيا .

وبما ان المتغيرات الاصلية $(X_1 ...... X_n)$ تتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات لذلك فان $Z_1 ...... Z_n$ تتوزع توزيعاً طبيعياً ايضاً وعلى النحو الاتي

مستقلة عن $Z_i \sim N(0, \lambda_i^2)$

$Z_j \sim N(0, \lambda_j^2)$

حيث ان $i \neq j \qquad i, j = 1,2,......., n$

فاذا قسمنا كل متجه من المتجهات المميزة على الجذر المميز الخاص بـه فاننا سوف نحصل على:

$$wi = \frac{vi}{\lambda i} \qquad i = 1,2,........, n$$

فتكون المصفوفة w كما ياتي:

$$W = \Lambda^{-1} V$$
$$\therefore V = \Lambda W$$

وبذلك يصبح التحويل كما يلي:

$$Y = \Lambda^{-1} Z$$

وحيث ان $Z = VX$

لذلك فان $Y = \Lambda^{-1} VX$

بما ان $V = \Lambda W$

اذا $Y = \Lambda^{-1} \Lambda WX = IWX = WX$

$$\therefore Y = \Lambda^{-1} Z = WX$$

حيث ان :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & .... & Y_{ij} & ... & Y_{1K} \\ Y_{21} & Y_{22} & ... & Y_{2j} & ... & Y_{2K} \\ . & . & . & . & . & . \\ Y_{i1} & Y_{i2} & ... & Y_{ij} & ... & Y_{iK} \\ . & . & . & . & . & . \\ Y_{n1} & Y_{n2} & ... & Y_{nj} & ... & Y_{nK} \end{bmatrix}$$

$$Y = \left[\underline{Y}_1 \quad \underline{Y}_2 \quad \dots \quad \underline{Y}_r \quad \dots \quad \underline{Y}_K\right]$$

حيث ان

$$Y_{ij} = W_i X_1 X_{1j} + W_i X_2 X_{2j} + \dots + W_i X_i X_{ij} + \dots + W_i X_n X_{nj}$$

حيث ان
$$i = 1,2,\dots\dots,n$$
$$j = 1,2,\dots\dots,k$$

$$\bar{Y}_i = 0 \qquad for \quad all \ i$$

وان مصفوفة التباين والتباين المشترك الخاصة بـــ Y هي:

$$Var.-Cov.(Y) = I = WRW'$$

أي ان

$$Var(Y_i) = 1 \qquad Cov.(Y_i, Y_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$$
$$i, j = 1,2,\dots\dots\dots,n$$

وحيث ان $Y = WX$ يمثل تحويلا خطيا لذلك فان $Y \sim N(0, I)$

$$Y_i \sim N(0,1) \ indep. \ of \quad Y_j \sim N(0,1)$$

$$\therefore Y'Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

(حيث ان مجموع مربعات n من المتغيرات المستقلة التي تتوزع توزيعا طبيعيـــا بوسط صفر وتباين واحد تتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية n).

وعند استخدام عينة صغيرة وحيث ان التباين قد قدر من العينة لذلك فان χ^2 يجب ان يستبدل بـــ T^2 (مجموع المربعات للمتغيرات المستقلة Y تساوي T^2).

أي ان :

$$T^2 = Y'Y$$

$$\therefore T_1^2 = \underline{Y}'_1 \underline{Y}_1$$

.

.

$$T_K^2 = \underline{Y}'_K \underline{Y}_K$$

ومن ثم تتم مقارنة هذه القيم مع قيمة T^{*2}

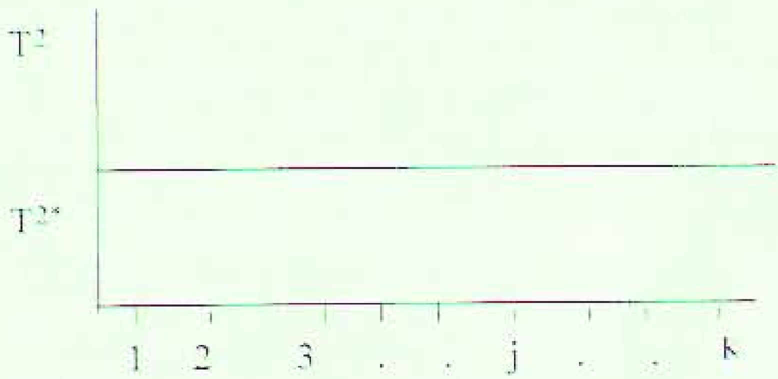
حيث ان

$$T^{2*} = \frac{(K-1)n}{(K-n)} F_\alpha(n, K-n)$$

فاذا كانت $T_i^2 < T^{2*}$ معنى هذا ان العملية الانتاجية تحت السيطرة.

اما اذا كانت $T_i^2 > T^{2*}$ معنى هذا ان العملية الانتاجية خارج السيطرة.

وتكون اللوحة الخاصة بالسيطرة كما ياتي:



فاذا اخرجت احدى النقاط او مجموعة منها خارج حد السيطرة عندئذ فان هذا يعني ان العملية الانتاجية ليست تحت السيطرة الاحصائية ،والعكس بالعكس.

المصادر:

1- محمد عبد الوهاب محمد العزاوي. (1989). "نظام السيطرة على النوعية في معمل اطارات الديوانية" ، رسالة ماجستير . جامعة صلاح الدين.

2- ، محجوب، بسمان فيصل والعلي، عبد الستار محمد. (1990). " التقييس والسيطرة النوعية في المنشآت الصناعية"، مديرية دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.

3- J. Edward Jackson . (1959). " Quality Control Methods for Several Related Variables "

4- Jackson. (1966)." Sequential Multivariate Procedures for Means with Quality control".

5-" Quality Control Methods for Multivariate Binomial and Poisson Distribution" Patel,H.I.1973.

6- W.J. Texas Tech University. (1980)."Practical Non Parametric Statistics"

7- " Introduction to statistical Quality control". John wiley & sons , New York 1985.

8- Thomas J. Lorenzen and Lonnie C. Vance .(1986). "The Economic Design of control charts: Aunified Approcach ". Technometrics, Vol – 28, No. 1, pp. 3-9,.